

ΠΡΟΤΑΣΗ

13/5/19

Εάν G_1, G_2 είναι φραγμένα ανοικτά σύνολα τότε:

$$V(G_1 \cup G_2) \leq V(G_1) + V(G_2)$$

- Γενικότερα εάν $(G_n)_n$ είναι μια ακολουθία φραγμένων ανοικτών συνόλων τότε:

$$V\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} G_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} V(G_n)$$

- Έστω K συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Εφόσον είναι συμπαγές αρα είναι και φραγμένο.
(λόγω της σχέσης της συνηθούς μετρικής με τη μετρική d_1) μπορώ να βρώ $I \subseteq \mathbb{R}^n$ το οποίο να περιέχει το K στο εσωτερικό του. Όμως κάθε διάστημα είναι ένα στοιχειώδες σύνολο. Επομένως η συλλογή όλων των στοιχειωδών συνόλων που έχουν την ιδιότητα να περιέχουν το K στο εσωτερικό είναι μη κενή.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Ορίζουμε ως μέτρο Lebesgue η χωρητικότητα του συμπλέγματος K να είναι ο πραγματικός αριθμός $V(K) = \inf \{V(Y) : K \subseteq Y, Y \text{ ανοικτό}\}$

Παρατήρηση

Εάν K_1, K_2 συμπαγή του $\mathbb{R}^n$ με $K_1 \subseteq K_2$ τότε ισχύει

$V(K_1) \leq V(K_2)$ διότι εάν Y στοιχειώδες μεσοίο ώστε

$$\left. \begin{array}{l} K_2 \subseteq Y^o \\ K_1 \subseteq K_2 \end{array} \right\} \Rightarrow K_1 \subseteq Y^o$$

συνεπώς

$$\{Y : Y \text{ στοιχειώδες και } K_2 \subseteq Y\} \subseteq \{Y : Y \text{ στοιχ.}, K_1 \subseteq Y^o\}$$

αρα

$$\{V(Y) : Y \text{ στοιχ.}, K_2 \subseteq Y^o\} \subseteq \{V(Y) : Y \text{ στοιχ.}, K_1 \subseteq Y^o\}$$

$$(A \subseteq B \Rightarrow \inf B \leq \inf A)$$

οπότε

$$\inf \{V(Y) : Y \text{ στοιχ.}, K_1 \subseteq Y^o\} \leq \inf \{V(Y) : Y \text{ στοιχ.}, K_2 \subseteq Y^o\}$$

$\overset{V(K_1)}{V(K_1)} \quad \text{αρα} \quad V(K_1) \leq V(K_2) \quad \overset{V(K_2)}{V(K_2)}$

ΠΡΟΤΑΣΗ

Εάν K_1, K_2 είναι δύο συμπαγή σύνολα τότε μεταξύ τους

$$V(K_1) + V(K_2) \leq V(K_1 \cup K_2)$$

• Έστω A φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$

Ορίζουμε ως εσωτερικό μέτρο του A , συμβ. $\underline{V}(A)$

να είναι: $\underline{V}(A) = \inf \{V(G) : A \subseteq G, G \text{ ανοικτό}\}$

και εξωτερικό μέτρο του A συμβ. $\overline{V}(A)$

$$\overline{V}(A) = \sup \{V(K) : K \subseteq A, K \text{ συμπαγές}\}$$

ΠΡΟΤΑΣΗ

Για κάθε φραγμένο σύνολο A και $\mathbb{R}^n$ ισχύει $\overline{V(A)} \subseteq \overline{V(A)}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Υποθέτουμε ότι K, G είναι δύο σύνολα τέτοια ώστε K συμπαγές, G ανοικτό και $K \subseteq A \subseteq G$ τότε εφόσον G είναι ανοικτό ως προς τη συνήθη μετρική και εφόσον αν $x, y \in \mathbb{R}^n$ ισχύει $d_1(x, y) = \max\{|x_i - y_i| : i=1, \dots, n\}$ (*) ότι $d_1(x, y) \leq d(x, y) \leq \sqrt{n} d_1(x, y)$ (όπου d συνήθη μετρική του $\mathbb{R}^n$) και εφόσον $x \in K \Rightarrow x \in G$ έπεται ότι για κάθε $x \in K$ υπάρχει μια d_1 -μπάλα με κέντρο το x και ακτίνα ρ_x τέτοια ώστε

$$B_{d_1}\left[x, \frac{\rho_x}{2}\right] \subseteq B_{d_1}(x, \rho_x) \subseteq G \quad (*) \quad \text{οπότε εφόσον}$$

$$\forall x \in K \Rightarrow x \in G \text{ έπεται ότι}$$

$$\bigcup_{x \in K} B_{d_1}\left[x, \frac{\rho_x}{2}\right] \subseteq G$$

Αλλά κάθε μπάλα $B_{d_1}(x, \frac{1}{2}\rho_x)$ είναι ανοικτό σύνολο ως προς τη συνήθη μετρική συνεπώς εφόσον

$$K \subseteq \bigcup_{x \in K} B_{d_1}(x, \frac{1}{2}\rho_x) \subseteq \left\{ B_{d_1}(x, \frac{1}{2}\rho_x) : x \in K \right\} \text{ αποτελεί}$$

για ανοικτή κάλυψη για το συμπαγές σύνολο K .

Άρα θα υπάρχει πεπερασμένη υποκάλυψη για το K

$$\exists \{x_1, x_2, \dots, x_k\} \subseteq K \text{ τέτοια ώστε } K \subseteq \bigcup_{i=1}^k B_{d_1}(x_i, \frac{1}{2}\rho_{x_i}) \subseteq \bigcup_{i=1}^k B_{d_1}\left[x_i, \frac{1}{2}\rho_{x_i}\right] \subseteq \bigcup_{x \in K} B_{d_1}\left[x, \frac{1}{2}\rho_x\right] \subseteq G \text{ Έαν θέσουμε}$$

$$I_i = B_{d_1}(x_i, \frac{1}{2}\rho_{x_i}) \quad i=1, \dots, k$$

τότε $K \subseteq I, \cup I_2 \cup \dots \cup I_n \subseteq \bar{I}, \cup \bar{I}_2 \cup \dots \cup \bar{I}_n \subseteq G$

Ομως κάθε διαστημα είναι ένα στοιχειώδες σύνολο και η ^{πενετρασμένη} ένωση στοιχειωδών είναι επίσης στοιχειώδες
 επεσεί ότι $\exists \gamma$ στοιχειώδες $K \subseteq \gamma \subseteq G$

Εφόσον K συμπαγές και γ στοιχειώδες και περιέχει το K και $V(K) = \inf \{ V(\gamma) : K \subseteq \gamma, \gamma \text{ στοιχειώδες} \} \leq V(\gamma)$

Επίσης εφόσον γ στοιχειώδες το οποίο περιέκεται στο ανοικτό G και $V(G) = \sup \{ V(\gamma), \gamma \text{ ποιχ}, \gamma \subseteq G \} \geq V(\gamma)$

Θα . $V(K) \leq V(\gamma) \leq V(G) \quad (**)$

ομως

$\bar{V}(A) = \inf \{ V(G) : A \subseteq G, G \text{ ανοικτό} \}$

συνεπώς από $(**)$ η οποία ισχύει για τυχαίο G ανοικτό και $A \subseteq G$ επεσεί

$V(K) \leq \inf \{ V(G) : A \subseteq G, G \text{ ανοικτό} \} = \bar{V}(A) \quad (***)$

σχέση $(***)$ ισχύει για τυχόν συμπαγές $K \subseteq A$ οπότε

$\bar{V}(A) = \sup \{ V(K) : K \subseteq A, K \text{ συμπαγές} \} \leq \bar{V}(A)$

Άρα $\underline{V}(A) \leq \bar{V}(A)$

ΠΡΟΤΑΣΗ

Εάν A_1, A_2 φραγμένα σύνολα τότε ισχύει:

$$\bar{V}(A_1 \cup A_2) \leq \bar{V}(A_1) + \bar{V}(A_2) \quad (1)$$

Επίσης εάν τα A_1, A_2 είναι ξένα μεταξύ τους τότε

$$\underline{V}(A_1 \cup A_2) \geq \underline{V}(A_1) + \underline{V}(A_2) \quad (2)$$

Ληοδευση

ii) Εάν A_1 είναι ένα φραγμένο σύνολο

$$\bar{V}(A_1) = \inf \{ V(G) : A_1 \subseteq G, G \text{ ανοικτό } \}$$

Επομένως εάν $\varepsilon > 0 \exists G_1$ ανοικτό τέτοιο ώστε

$$A_1 \subseteq G_1 \text{ και } V(G_1) \leq \bar{V}(A_1) + \varepsilon \quad (3)$$

Ομοίως $\exists G_2$ ανοικτό (και φραγμένο) τέτοιο ώστε

$$A_2 \subseteq G_2 \text{ και } V(G_2) \leq \bar{V}(A_2) + \varepsilon \quad (4)$$

Εφόσον $A_1 \subseteq G_1$ και $A_2 \subseteq G_2$ επεται $A_1 \cup A_2 \subseteq G_1 \cup G_2$

(και $G_1 \cup G_2$ ανοικτό και φραγμένο) οπότε

$$\bar{V}(A_1 \cup A_2) = \inf \{ V(G) : A_1 \cup A_2 \subseteq G, G \text{ ανοικτό } \} \leq V(G_1 \cup G_2)$$

$$\leq V(G_1) + V(G_2) \leq \bar{V}(A_1) + \varepsilon + \bar{V}(A_2) + \varepsilon$$

$$= \bar{V}(A_1) + \bar{V}(A_2) + 2\varepsilon$$

τα παραπάνω ισχύουν για τυχαίο $\varepsilon > 0$ οπότε παίρνω
για $\varepsilon \rightarrow 0$ έχουμε :

$$\bar{V}(A_1 \cup A_2) \leq \bar{V}(A_1) + \bar{V}(A_2)$$

ii) Εάν A_1, A_2 είναι μεταξύ τους. Εφόσον :

$$\underline{V}(A_1) = \sup \{ V(K) : K \subseteq A_1, K \text{ συμπαγές} \} \text{ επεται ότι εάν } \varepsilon > 0$$

$\exists K_1, K_2$ συμπαγή με $K_1 \subseteq A_1$ και $K_2 \subseteq A_2$ και

$$V(K_1) \geq \underline{V}(A_1) - \varepsilon \quad (5) \text{ και}$$

$$V(K_2) \geq \underline{V}(A_2) - \varepsilon \quad (6)$$

Οπως $K_1 \cup K_2 \subseteq A_1 \cup A_2$ και $K_1 \cup K_2$ κλειστό και φραγμένο
του $\mathbb{R}^n$ άρα συμπαγές οπότε :

$$\underline{V}(A_1 \cup A_2) = \sup \{ V(K) : K \subseteq A_1 \cup A_2, K \text{ συμπαγές} \} \geq V(K_1 \cup K_2) \geq$$

$$\geq V(K_1) + V(K_2) \geq \underline{V}(A_1) - \varepsilon + \underline{V}(A_2) - \varepsilon = \underline{V}(A_1) + \underline{V}(A_2) - 2\varepsilon$$

οπότε για $\varepsilon \rightarrow 0$ έχουμε το ζητούμενο.

ορισμός

• Ένα φραγμένο σύνολο A λέγεται μετρήσιμο εάν ισχύει $\bar{V}(A) = \underline{V}(A)$

Η κοινή αυτή τιμή παριστάεται με $V(A)$ και λέγεται μέτρο Lebesgue ή χωρητικότητα του φραγμένου συνόλου A

• Συμβ. με A_b τη συλλογή όλων των μετρησιμων φραγμένων υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$

ΠΡΟΤΑΣΗ

Εάν K συμπαγές του $\mathbb{R}^n$ τότε $K \in A_b$

ΠΡΟΤΑΣΗ

Εάν G ανοικτό και φραγμένο του $\mathbb{R}^n$ τότε $G \in A_b$

ΠΡΟΤΑΣΗ

Εάν $A_1, A_2 \in A_b$ και A_1, A_2 ξένα μεταξύ τους τότε $A_1 \cup A_2 \in A_b$ και $V(A_1 \cup A_2) = V(A_1) + V(A_2)$

απόδειξη

Εφόσον $A_1, A_2 \in A_b$ επεχει: $V(A_1) = \underline{V}(A_1) = \bar{V}(A_1)$

οπότε $V(A_1) + V(A_2) = \underline{V}(A_1) + \underline{V}(A_2) \stackrel{A_1, A_2 \text{ ξένα}}{\leq} \underline{V}(A_1 \cup A_2) \leq \underline{V}(A_1) + \underline{V}(A_2) = V(A_1) + V(A_2)$

Άρα $\underline{V}(A_1 \cup A_2) = \underline{V}(A_1 \cup A_2) = V(A_1) + V(A_2)$ $\textcircled{A}$

δηλ $V(A_1 \cup A_2) = \bar{V}(A_1 \cup A_2) = V(A_1 \cup A_2)$ αρα $A_1 \cup A_2 \in A_b$
και $V(A_1 \cup A_2) \stackrel{\textcircled{A}}{=} V(A_1) + V(A_2)$

ΠΡΟΤΑΣΗ

Έστω A φραγμένο στο $\mathbb{R}^n$ τότε

$A \in A_b \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0) (\exists \text{ συμπαγές και } G \text{ ανοικτό}) :$

$$K \subseteq A \subseteq G \text{ και } \forall (G \setminus K) \subseteq \varepsilon$$

ΠΡΟΤΑΣΗ

Έστω A_b συλλογή μετρησιμων φραγμένων υποσ. στο $\mathbb{R}^n$
και $A_1, A_2 \in A_b$ τότε

(i) $A_1 \setminus A_2 \in A_b$

(ii) $A_1 \cap A_2 \in A_b$

(iii) $A_1 \cup A_2 \in A_b$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έφασον A_1, A_2 είναι φραγμένα και μετρησιμα. Έστω $\varepsilon > 0$
~~επειραζόμενα~~ υπάρχουν K_1, K_2 συμπαγή και G_1, G_2 ανοικτά
τέτοια ώστε:

$$K_1 \subseteq A_1 \subseteq G_1 \text{ και } K_2 \subseteq A_2 \subseteq G_2 (*)$$

$$\text{και } \forall (G_1 \setminus K_1) \subseteq \frac{\varepsilon}{2} \text{ και } \forall (G_2 \setminus K_2) \subseteq \frac{\varepsilon}{2}. \text{ Έφασον ισχύει η } (*)$$

$$G_1^c \subseteq A_1^c \subseteq K_1^c \text{ οπότε εαν } K := K_1 \setminus G_2 \leftarrow \text{κλειστό και φραγμ. στο } \mathbb{R}^n$$

$$\text{και } G := G_1 \setminus K_2 \text{ ανοικτό} \quad \text{αφ' ου συμπαγές}$$

Έχουμε

$$K = K_1 \setminus G_2 = K_1 \cap G_2^c \stackrel{A}{\subseteq} \underbrace{A_1 \cap A_2^c}_{A_1 \setminus A_2} \subseteq G_1 \cap K_2^c = G_1 \setminus K_2 = G$$

ΕΠΙΛΟΓΗ

$$\begin{aligned} G \setminus K &= [(G_1 \setminus K_2) \setminus (K_1 \setminus G_2)] = [(G_1 \setminus K_2) \setminus K_1] \cup [(G_1 \setminus K_2) \cap G_2] \\ &= G_1 \cap K_2^c \cap K_1^c \cup [G_1 \cap K_2^c \cap G_2] = \\ &= [(G_1 \setminus K_1) \setminus K_2] \cup [G_1 \cap G_2 \setminus K_2] \subseteq (G_1 \setminus K_1) \cup (G_2 \setminus K_2) \end{aligned}$$

και $G_1 \setminus K_1, G_2 \setminus K_2$ ανοικτά και φραγμένα

(οπότε εφόσον εαν Λ_1, Λ_2 φραγμένα ανοίχτει

$$V(\Lambda_1 \cup \Lambda_2) \leq V(\Lambda_1) + V(\Lambda_2) \quad \text{(*)}$$

Άρα από την (1)

$$V(G \setminus K) \leq V[(G_1 \setminus K_1) \cup (G_2 \setminus K_2)] \stackrel{(2)}{\leq} V(G_1 \setminus K_1) + V(G_2 \setminus K_2)$$

$$\stackrel{(*)}{\leq} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Οπότε $A_1 \setminus A_2 \in \mathcal{A}_b$.

ΠΡΟΤΑΣΗ

Εαν $\mathcal{A}_b$ συλλογή μετρήσιμων φραγμένων υποσυν. του $\mathcal{F}$ και $A_1, A_2 \in \mathcal{A}_b$ τότε

(i) $A_1 \setminus A_2 \in \mathcal{A}_b$

(ii) $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{A}_b$

(iii) $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A}_b$

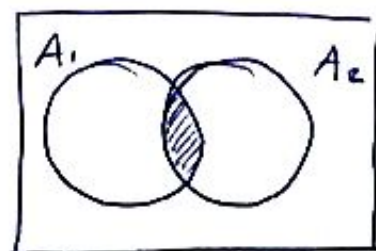
Απόδειξη

(i) $A_1 \cap A_2 = A_1 \setminus (A_1 \setminus A_2)$ από το (i)

~~αφού~~ $A_1 \setminus A_2 \in \mathcal{A}_b$ εφόσον $A_1, A_2 \in \mathcal{A}_b$

οπότε εφόσον $A_1 \in \mathcal{A}_b$ και $A_1 \setminus A_2 \in \mathcal{A}_b$

επεται ότι $A_1 \cap A_2 = A_1 \setminus (A_1 \setminus A_2) \in \mathcal{A}_b$



(iii) $A_1 \cup A_2 = (A_1 \setminus A_2) \cup (A_1 \cap A_2) \cup (A_2 \setminus A_1)$

και εφόσον $A_1 \setminus A_2 \in \mathcal{A}_b$, $A_2 \setminus A_1 \in \mathcal{A}_b$

$A_1 \cap A_2 \in \mathcal{A}_b$

και $A_1 \setminus A_2$, $A_2 \setminus A_1$ και $A_1 \cap A_2$ είναι

μεταξύ τους άρα από προηγούμενη πρόταση που

αφορά ένωση ξένων μετρήσιμων έχουμε $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A}_b$